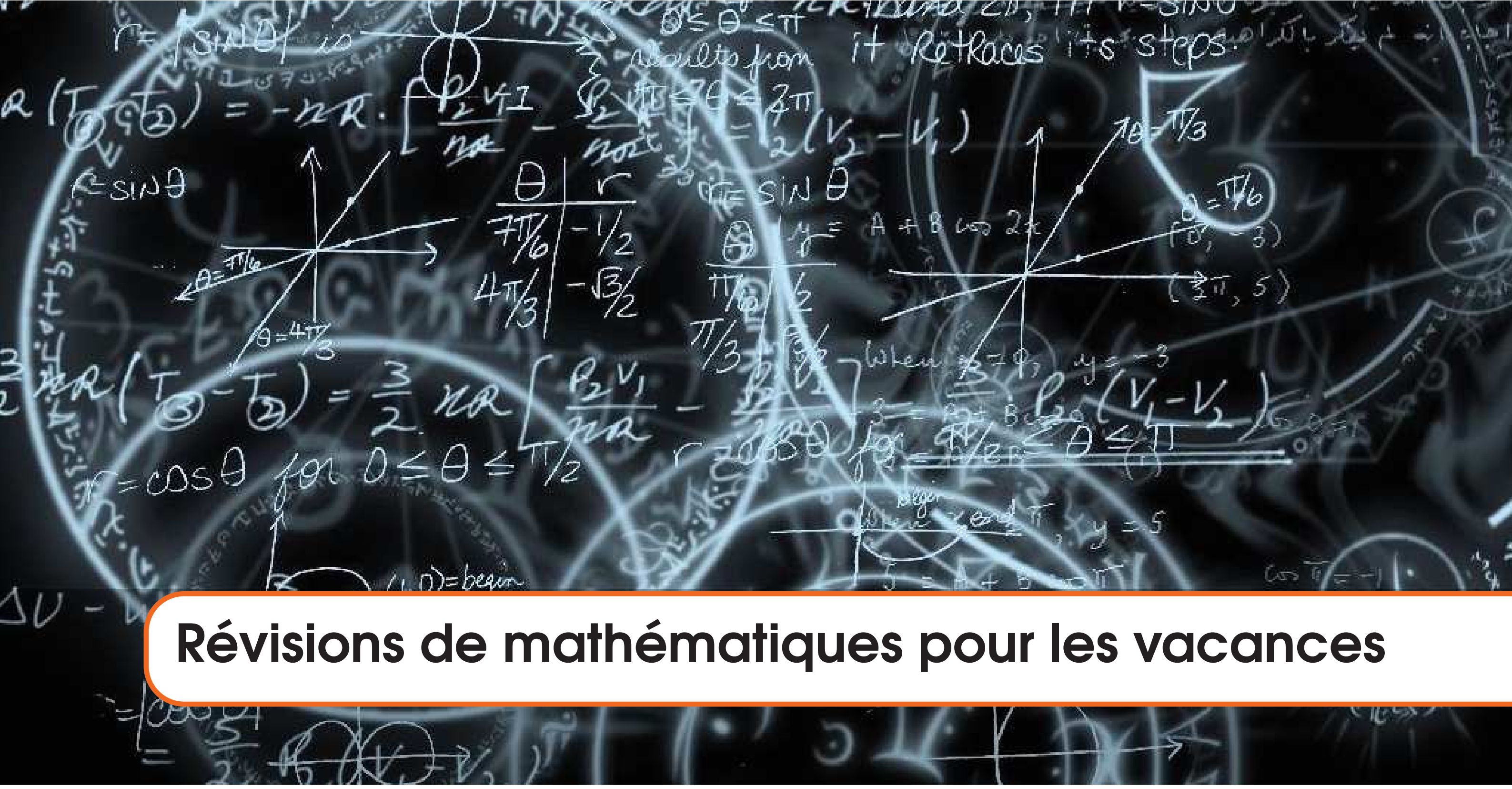


Révisions de mathématiques pour les vacances

Félicitation à tous pour votre admission au CPES !
Afin de préparer votre rentrée en filière ESD je vous propose quelques exercices qui pourront vous aider à réviser votre programme de mathématiques et/ou à le consolider si besoin.
Les exercices sont classés par thème et un tableau final (que vous me rendrez à la rentrée) vous permet de faire le point sur d'éventuelles compétences à revoir de votre côté avant la rentrée.

Bonnes révisions et bonnes vacances !
Jordane MATHIEU

Exercice 1 — Savoir effectuer des calculs algébriques (fraction, puissance...).

1. Que vaut :
   a. $\frac{1}{3}-\frac{4}{5}$, b. $\frac{2}{7}\times\frac{2}{3}$ c. $-\frac{4}{3}+5$ d. $x-\frac{5-2x}{4}+\frac{3x}{-4}$
2. Factoriser puis résoudre les équations suivantes
   a. $x^2-2x+1=0$ b. $x^2-18x+81=0$ c. $9x^2+12x+4=0$
   d. $4x^2-4x+1=0$ e. $x^2-7=0$
3. Factoriser les expressions suivantes par x^2 puis par $\frac{1}{x}$
   a. $1+x^2+3x^3$ b. $2x-\frac{1}{x}+3$
4. Simplifier au maximum
   a. $\frac{2^4\times5^3}{2\times5^4}$, b. $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{4}{3}}$, c. $\left(\frac{1}{4}\right)^3\times12$, d. $9/3^2$,
   e. $\left(3^4\right)^2$, f. $(2\times3)^3$, g. $4^{-1}\times16$ h. $\frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{2x+1}{x}}$
5. Mettre les nombres suivants sous la forme $a+b\sqrt{c}$ avec a,b,c trois réels.
   a. $3\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)$ b. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+3$

■

Exercice 2 — Savoir étudier un polynôme de degré 2 (racines, signe, identification).

1. Quelles sont les racines et le signe du polynôme $P(x) = x^2 - 3x + 2$?
2. Trouver toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ telles que $(x-1)(x+2) = 2x^2 - 8$.
3. Trouver deux nombres a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad (ax+b)(x+2) = x^2 - x - 6$,
4. Étudier le signe de $P(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x + 1$.

Exercice 3 — Savoir résoudre une équation ou une inéquation .

1. Trouver toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ telles que
   a. $2x^2 + 3 = 2x^2 + x - 1$ b. $x^2 = 1$
   c. $x - 1 < 2(x+1)$, d. $\frac{x-1}{x+1} < 2$
2. Déterminer à l'aide d'un tableau, le signe des expressions suivantes
   a. $(x-4)(x-3)$ b. $\frac{3-x}{2+x}$ c. $\frac{x(x+1)}{3x+2}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes
   a. $\frac{5-3x}{x^2-1} \leqslant 0$ b. $\frac{2x+1}{x+2} \leqslant 1$ c. $\frac{x+3}{x^2-1} \geqslant \frac{3}{x-1}$
4. Si $x \in [-1;3]$, $y \in [1;2]$ et $z \in [-3;-1]$, donner un encadrement de
   a. $-5x+1$ b. $x^2 - 4$ c. $x+y$
   d. $\frac{1}{y}$ et $\frac{1}{z}$ e. $3z - 2y$ f. yz
5. Résoudre le système suivant par substitution puis par combinaison : $\begin{cases} 2x - y = & 5 \\ -x + 2y = & 4 \end{cases}$

   De même avec le système $\begin{cases} 3x + 2y = & 5 \\ x + 3y = & 3 \end{cases}$

Exercice 4 — Savoir utiliser les fonctions usuelles (fonctions carrée, racine, inverse, exponentielle, logarithme).

1. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes
   a. $f_1(x) = x^2$ b. $f_2(x) = \frac{1}{x}$ c. $f_3(x) = \sqrt{x}$
   d. $f_4(x) = e^x$ e. $f_5(x) = \ln(x)$
2. Tracer les courbes représentatives des cinq fonctions ci-dessus.
3. Donner la dérivée des cinq fonctions ci-dessus.
4. Simplifier au maximum
   a. $\sqrt{8}$ b. $\sqrt{2+3}$ c. $\sqrt{2 \times 3}$
   d. $\sqrt{x^2}$ e. $(\sqrt{x})^2$ f. $\sqrt{\frac{1}{2}}$
5. Compléter, en précisant pour quel x l'expression existe :
   a. $\ln(e^x) =$ .... b. $e^{\ln(x)} =$ .... c. $\frac{e^{2x}}{e^{3x}} =$ ....
   d. $(e^x)^2 =$ .... e. $\ln(2) + \ln(x) =$ .... f. $\ln(\frac{1}{x}) =$ ....
   g. $\ln(x^n) =$ ....

6. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ (dire auparavant pour quel x l'équation a du sens) :

   a. $\ln(e^x) = 1$ b. $e^{\ln(4x)} = 4$ c. $e^{2x+3} = e^{3x}$

   d. $e^{-x} - \frac{1}{e^x} = 2$ e. $\frac{e^{2x}}{e^{3x}} = 1$ f. $(e^x)^2 = 0$

   g. $\ln(2) + \ln(x) = \frac{1}{2}$ h. $\ln(\frac{1}{x}) = 0$ i. $x^n = 2$, où $n \in \mathbb{N}$

■

Exercice 5 — Savoir étudier une fonction simple.

1. Après avoir donné leur ensemble de définition, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

   a. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ b. $f(x) = \sqrt{x+2}$

   c. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x}}$ d. $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

   e. $f(x) = \ln(1+x^2)$ f. $f(x) = e^{x\ln(2)}$

2. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée première, construire le tableau de variations et donner une représentation graphique. Quelle est la limite de f lorsque $x \to +\infty$?

   a. $f(x) = \frac{1}{x}$ b. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

   c. $f(x) = x^3 - 6x^2 + x - 1$ d. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

3. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 1/2$ à la courbe représentative de la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

■

Exercice 6 — Savoir étudier une suite arithmétique et géométrique, donner sa limite, donner sa monotonie.

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et $u_{n+1} = 1 + 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer u_1, et u_2.
   (b) La suite (u_n) est-elle une suite arithmétique ? géométrique ?
   (c) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 1$. Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique et donner sa raison.
   (d) Quelle est sa limite quand n tend vers $+\infty$?
2. On suppose qu'un pin d'un âge supérieur à 10 ans a une croissance régulière annuelle de 40cm de hauteur. Pour tout n entier supérieur à 10, on note h_n la hauteur en mètre du pin à l'âge n.
   (a) En supposant dans cette question que $h_{10} = 22$, calculez h_{11} et h_{12}.
   (b) Montrer que (h_n) est une suite arithmétique. Est-elle croissante ou décroissante ?
   (c) On suppose qu'un pin de 10 ans a une hauteur de 17m. Quelle sera sa hauteur lorsqu'il aura 22 ans ?
3. Déterminer les limites des suites suivantes :

   a. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n$ b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ c. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1.01^n$ d. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{47}{43}\right)^n$ e. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.89^n$
4. En 2005, année de sa création, un club de randonnée pédestre comportait 80 adhérents. Chacune des années suivantes on a constaté que 10% des participants ne renouvelaient pas leur adhésion au club et que 20 nouvelles personnes s'inscrivaient au club. On suppose que cette évolution reste la même au fil des ans.
   On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 80$ et pour tout entier natuel n,
   $u_{n+1} = 0,9u_n + 20$. Pour tout entier naturel n on pose $v_n = u_n - 200$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme. Exprimer v_n en fonction de n.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n on a $u_n = 200 - 120 \times 0.9^n$. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
   (c) L'objectif du président du club est d'atteindre au moins 180 adhérents. Cet objectif est-il réalisable ? Idem avec 300.

■

Révisions de mathématiques

Calculs algébriques (fraction, puissance...)

Exercice 1.1

a. $\frac{1}{3}-\frac{4}{5}=\frac{1\times 5}{3\times 5}-\frac{4\times 3}{5\times 3}=\frac{5}{15}-\frac{12}{15}=\frac{-7}{15}$

on écrit les deux fractions avec le même dénominateur (ici 15)

b. $\frac{2}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{2\times 2}{7\times 3}=\frac{4}{21}$

c. $\frac{-4}{3}+5=\frac{-4}{3}+\frac{5\times 3}{3}=\frac{-4+15}{3}=\frac{11}{3}$

d. $x-\frac{5-2x}{4}+\frac{3x}{-4}=\frac{4x}{4}-\frac{(5-2x)}{4}-\frac{3x}{4}=\frac{4x-(5-2x)-3x}{4}=\frac{3x-5}{4}$

Exercice 1.2

Factoriser = passer d'une somme à un produit
Développer = passer d'un produit à une somme

Exemple : $7\times(3+1)=7\times 3+7\times 1$

forme factorisée — forme développée

$\xrightarrow{\text{Développer}}$ / $\xleftarrow{\text{Factoriser}}$

En pratique, c'est "facile" de développer, plus difficile de factoriser.
Les identités remarquables sont utiles pour factoriser certaines expressions.

$$\boxed{\begin{aligned}(a-b)\times(a+b)&=a^2-b^2\\(a+b)^2&=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2&=a^2-2ab+b^2\end{aligned}}$$

Exemples :

$x^2-\sqrt{7}^2=(x-\sqrt{7})\times(x+\sqrt{7})$ #2e

$(3x)^2+2\times(3x)\times 2+2^2=(3x+2)^2$ #2c

$(2x)^2-2\times(2x)\times 1+1^2=(2x-1)^2$ #2d

formes développées — formes factorisées

a. $x^2-2x+1=(x-1)^2$ par identité remarquable
$=0$ si et seulement si $x-1=0 \iff x=1$

b. $x^2-18x+81=(x-9)^2$ par ...
$=0$ si et seulement si $x-9=0 \iff x=9$

c. $9x^2+12x+4=(3x+2)^2$ par ...
$=0$ ssi $3x+2=0 \iff x=\frac{-2}{3}$

d. $4x^2-4x+1=(2x-1)^2$ par ...
$=0$ ssi $2x-1=0 \iff x=\frac{1}{2}$

e. $x^2-7=(x-\sqrt{7})\times(x+\sqrt{7})$ par ...
$=0$ ssi $x=\pm\sqrt{7}$

Exercice 1.3

Dans cette exercice, on cherche à écrire une somme de 2,3 termes sous la forme d'un produit. On procède par tests/erreurs pour trouver 2,3 termes qui, sous la forme développée, satisfont l'égalité.

a. $1+x^2+3x^3 = x^2 \times \left(\frac{1}{x^2}+1+3x\right)$

on factorise par x^2

$= \frac{1}{x} \times \left(x+x^3+3x^4\right)$

on factorise par $\frac{1}{x}$

b. $2x - \frac{1}{x} + 3 = x^2 \times \left(2\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2}\right)$

$= \frac{1}{x} \times \left(2x^2 - 1 + 3x\right)$

Rappels de cours

$x^a \times x^b = x^{a+b}$ $\quad (x^a)^b = x^{a\times b}$

$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ $\quad (x \times y)^a = x^a \times y^a$

$x^0 = 1,\ x^1 = x,\ x^2 = x \times x,\ x^{-1} = \frac{1}{x}$

En particulier, $x \times \frac{1}{x} = 1$

Exercice 1.4

a. $\frac{2^4 \times 5^3}{2 \times 5^4} = 2^{4-1} \times 5^{3-4} = 2^3 \times 5^{-1} = \frac{2^3}{5}$

b. $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

c. $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \times 12 = \frac{1^3}{4^3} \times 4 \times 3 = \frac{1}{4^2} \times 3 = \frac{3}{4^2}$

d. $\frac{9}{3^2} = 1$

e. $(3^4)^2 = 3^{4\times 2} = 3^8$

f. $(2\times 3)^3 = 2^3 \times 3^3$

g. $4^{-1} \times 16 = 4^{-1} \times 4^2 = 4$

h. $\frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{2x+1}{x}} = \frac{2x-1}{\cancel{x}} \times \frac{\cancel{x}}{2x+1} = \frac{2x-1}{2x+1}$

Révisions de mathématiques

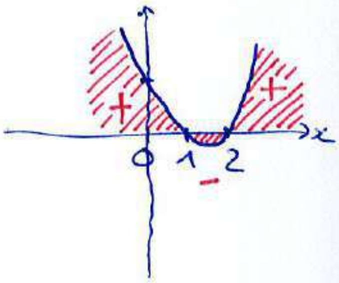
Polynôme de degré 2 (racines, signe, identification)

Exercice 2

1. On calcule les images de 0, 1 et 2 par la fonction P.

$\left.\begin{array}{l} P(0)=2 \\ P(1)=0 \\ P(2)=0 \end{array}\right\}$ On en déduit que 1 et 2 sont les racines du polynome P.
(autrement dit, les antécédents de 0 par la fonction P)

On vérifie aisément que $\boxed{P(x) = \underbrace{x^2-3x+2}_{\text{forme développée}} = \underbrace{(x-1)\times(x-2)}_{\text{forme factorisée, utile pour étudier le signe de } P(x).}}$



On en conclut que :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$P(x)$		+	0	−	0	+	

2. Posons $g(x) = (x-1)\times(x+2) - (2x^2-8)$
$= x^2 - x + 2x - 2 - 2x^2 + 8$
$= -x^2 + x + 6$

On a $(x-1)\times(x+2) = 2x^2-8$ si et seulement si $g(x)=0 \iff -x^2+x+6=0$

3. Développons $(ax+b)(x+2) = ax^2 + bx + 2ax + 2b = ax^2 + (2a+b)x + b$

On en déduit que $(ax+b)(x+2) = x^2-x-6$ si et seulement si $ax^2 + (2a+b)x + 2b$
$= 1x^2 + (-1)x + (-6)$

Par identification, $\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=-1 \\ 2b=-6 \end{cases}$ donc $a=1$ et $b=-3$

Ainsi on a $\underbrace{(x-3)\times(x+2)}_{\text{forme factorisée}} = \underbrace{x^2-x-6}_{\text{forme développée}}$ et on en conclut que $g(x)=0$
$\iff (x-3)\times(x+2)=0$
$\iff x=3$ ou $x=-2$

4. On remarque que $P(1)=0$
On cherche donc à factoriser $P(x)$ par $(x-1)$.
On a $P(x) = (x-1)\times\underbrace{\left(-x^2+x-1\right)}_{\text{toujours négatif (preuve en calculant le discriminant } \Delta<0)}$

Conclusion:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$P(x)$		+	0	−	

Révisions de mathématiques

Equation et inéquation

Exercice 3

1a. $\cancel{2x^2}+3=\cancel{2x^2}+x-1 \iff 3=x-1 \iff x=4$

b. $x^2=1 \iff x=\pm\sqrt{1}$

⚠ 2 solutions

c. $x-1<2(x+1) \iff \cancel{x}-1<\cancel{2x}+2 \iff -3<x$

d. $\frac{x-1}{x+1}<2 \iff \begin{cases} x-1<2(x+1) \text{ et } x+1>0 \\ \text{ou } x-1>2(x+1) \text{ et } x+1<0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>-3 \text{ et } \boxed{x>-1} \\ \text{ou } \boxed{x<-3} \text{ et } x<-1 \end{cases} \iff x>-1 \text{ ou } x<-3$

$x\neq-1$

on raisonne par cas

on inverse l'ordre car on multiplie par un nombre négatif

implique

2a.

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x-3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
P		$+$	0	$-$	0	$+$	

b.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$2+x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
φ		$-$	||	$+$	0	$-$	

c.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$3x+2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
φ		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

3a. Voir exo 2c. en remarquant que $x^2-1=(x-1)\times(x+1)$

b. Voir exo 1d. en considérant $x+2>0$ ou $x+2<0$

c. Remarquer que $(x^2-1)=(x-1)\times(x+1)$ permet de simplifier l'inéquation (terme en $x-1$)

⚠ Attention en simplifiant, le sens de l'inégali

Faire par cas, $x-1>0$ ou $x-1<0$

4a. $-1\leq x\leq 3$

donc $5+1\geq -5x+1\geq -15+1$

$\Rightarrow 6\geq -5x+1\geq -14$

b. $0\leq x^2\leq 9$

donc $-4\leq x^2-4\leq 5$

c. $0\leq x+y\leq 5$

d. $\frac{1}{3}\geq\frac{1}{y}\geq\frac{1}{2}$ (on inverse l'ordre car la fonction inverse $\frac{1}{x}$ est ↘)

$\frac{-1}{3}\geq\frac{1}{z}\geq -1$

e. $-9\leq 3z\leq -3$

$-4\leq -2y\leq -2$ (on inverse l'ordre car $x\mapsto -2x$ ↘)

f. $-1\leq yz\leq -6$

5. 2 équations, 2 variables, on cherche à se ramener à des équations à 1 variable.

$\begin{cases} 2x-y=5 \\ -x+2y=4 \;\; \times 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-y=5 \\ 3y=13 \;\; (L_1+L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{1}{2}(5+y) \\ y=\frac{13}{3} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=\frac{14}{3} \\ y=\frac{13}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ x+3y=3 \end{cases} \iff \begin{cases} -7y=-4 \;\; (L_1-3L_2) \\ x=3\times(1-y) \end{cases} \iff \begin{cases} y=\frac{4}{7} \\ x=\frac{9}{7} \end{cases}$

Révisions de mathématiques

Fonctions usuelles (carrée, racine, inverse, exp, log)

Exercice 4.

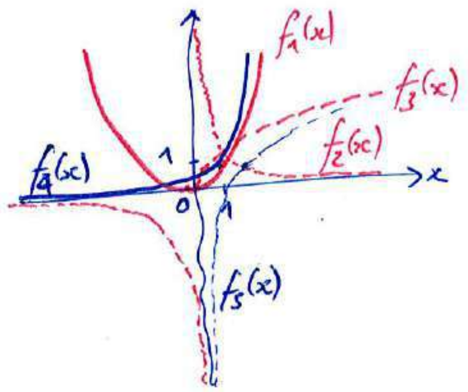
1. Le domaine de définition d'une fonction est l'ensemble des valeurs x qui ont une image par f.

On a $D_{f_1} = \mathbb{R}$ $\quad$ $D_{f_3} = [0, +\infty[$

$D_{f_2} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ $\quad$ $D_{f_4} = \mathbb{R}$

(car on ne peut pas calculer $\frac{1}{0}$) $\quad$ $D_{f_5} =]0, +\infty[$

2.



3.

$f_1(x) = x^2$	$f_1'(x) = 2x$
$f_2(x) = \frac{1}{x}$	$f_2'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f_3(x) = \sqrt{x}$	$f_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f_4(x) = e^x$	$f_4'(x) = e^x$
$f_5(x) = \ln(x)$	$f_5'(x) = \frac{1}{x}$

4. a) $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2+3} = \sqrt{5}$

c) $\sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$

d) $\sqrt{x^2} = |x|$ pour tout réel x

e) $(\sqrt{x})^2 = x$ pour tout réel $x \geq 0$

f) $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

5. a) $\ln(e^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) $e^{\ln x} = x$ pour tout $x > 0$

c) $\frac{e^{2x}}{e^{3x}} = e^{2x-3x} = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

d) $(e^x)^2 = e^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

e) $\ln(2) + \ln x = \ln(2x)$ pour tout $x > 0$

f) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ pour tout $x > 0$

g) $\ln(x^n) = n \times \ln|x|$ pour tout $x > 0$

6. a) $\ln(e^x) = 1 \iff \ln(e^x) = \ln(e^0) \iff x = 0$

b) $e^{\ln(4x)} = 4 \iff \ln(4x) = \ln(4) \iff x = 1$

c) $e^{2x+3} = e^{3x} \iff 2x + 3 = 3x \iff x = 3$

d) $e^{-x} - \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x} = 0$ donc l'équation n'a pas de solutions.

e) $\frac{e^{2x}}{e^{3x}} = 1 \iff e^{-x} = e^0 \iff x = 0$

f) $(e^x)^2 = 0 \iff e^x = 0$ pas de solutions

g) $\ln(2) + \ln(x) = \frac{1}{2} \iff \ln(2x) = \frac{1}{2}$
$\iff 2x = e^{1/2}$ soit $x = \frac{e^{1/2}}{2}$

h) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff \frac{1}{x} = e^0 = 1 \iff x = 1$

i) $x^n = 2 \iff x = 2^{1/n}$ si n impair
$2^{1/n}$ si n pair

Révisions de mathématiques
Etude d'une fonction simple

Exercice 5

1. Pour trouver l'ensemble de définition d'une fonction, on cherche les "valeurs interdites." En particulier, on s'assure de ne pas diviser $\frac{1}{x}$ par 0, qu'on ne prend pas la racine $\sqrt{x}$ d'un nombre négatif, etc. On obtient ainsi

$D_{f_a} = \mathbb{R}$, $D_{f_b} = [-2, +\infty[$, $D_{f_c} =]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[$
$D_{f_d} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$, $D_{f_e} = \mathbb{R}$, $D_{f_f} = \mathbb{R}$

Pour calculer les dérivées, on se sert des dérivées usuelles (fonctions simples) et des formules (à connaître) :

$$\boxed{\begin{array}{ll} (f+g)' = f' + g' & \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \\ (f \times g)' = f' \cdot g + f \cdot g' & (f \circ g)' = g' \times f' \circ g \end{array}}$$

a. $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ b. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

c. $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}}$ d. $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$

e. $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ f. $f'(x) = \ln(2) \cdot e^{x \cdot \ln(2)}$

2. a. $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
f	0	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	0

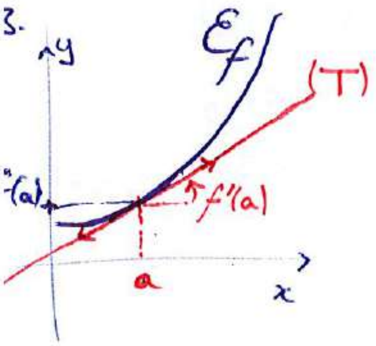
b. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

c. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 1$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

3.



$$\boxed{y = \underbrace{f'(a)}_{\text{pente}} \cdot (x-a) + \underbrace{f(a)}_{\text{valeur pour } x=a}}$$

(droite d'équation $y = ax + b$)

$$\Rightarrow \quad y = \underbrace{f'\left(\tfrac{1}{2}\right)}_{\frac{-2}{\sqrt{3}}} \cdot \left(x - \tfrac{1}{2}\right) + \underbrace{f\left(\tfrac{1}{2}\right)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Révisions de mathématiques

Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 6

1.a. On applique la formule par récurrence $u_{n+1} = 1+2u_n$

$u_1 = 1+2u_0 = 1+2 = 3$

$u_2 = 1+2u_1 = 1+2\times 3 = 7$

$$\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_1 = 3 \\ u_2 = 7 \end{array} \quad +2,\ +4 \quad \times 3,\ \times\frac{7}{3}$$

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ la suite n'est pas arithmétique

$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ la suite n'est pas géométrique.

$$\underbrace{v_{n+1} = u_{n+1}+1}_{\text{par définition de } (v_n)} \underset{\text{par définition de } (u_n)}{=} (1+2u_n)+1 = 2\times\underbrace{(1+u_n)}_{= v_n \text{ par définition}} = 2\times v_n$$

donc (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0+1 = 2$ et de raison $q = 2$.

1. $v_n = v_0 \times q^n = 2\times 2^n = 2^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

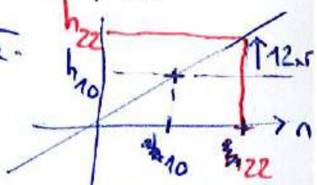
"croissance régulière annuelle de 40 cm" → suite arithmétique de raison $r = 40\text{cm} = 0,4\text{ m}$

a. $h_{11} = h_{10}+r = 22,4$

$h_{12} = h_{10}+2r = 22,8$

2b. (h_n) est une suite arithmétique croissante.

2c. $h_{22} = h_{10} + 12\times r = 17+12\times 0,4 = 21,8$ m



a. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ c. $\lim\limits_{n\to+\infty} (1,01)^n = +\infty$ d. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{47}{43}\right)^n = +\infty$ e. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,89^n = 0$

4. a. $$\underset{\text{par définition de } (v_n)}{v_{n+1}} = u_{n+1} - 200 \underset{\text{par définition de } (u_n)}{=} (0,9\cdot u_n + 20) - 200 \underset{\text{on développe puis factorise}}{=} 0,9\,\underbrace{(u_n - 200)}_{= v_n \text{ par définition}} = 0,9\times v_n$$

donc suite géo de raison $q = 0,9$ et premier terme $v_0 = -120$

On en déduit que $v_n = v_0 \times q^n = -120\times 0,9^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

b. $v_n = u_n - 200$ donc $u_n = v_n + 200 = 200 - \underbrace{120\times 0,9^n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 200$

c.

n	0	$+\infty$
u_n	80 ↗	200

$180 \in [80, 200]$ donc 180 réalisable.

$300 > 200$ donc 300 irréalisable.